

ВИКОРИСТАННЯ ІТЕРАЦІЙНОГО ПРОЦЕСУ ПРИ МОДЕЛЮВАННІ ВЗАЄМОДІЇ ЕЛЕМЕНТІВ МАШИН З ДИСКРЕТНИМ СЕРЕДОВИЩЕМ

В статті обґрунтовуються фізичні співвідношення моделі дискретного середовища, формулюється математична модель взаємодії з ним елементів машин та механізмів, наводиться алгоритм запропонованого ітераційного процесу.

The article deals with physical correlations of the discrete medium model. Mathematical model of the interaction of the machine's components and mechanisms with the discrete medium is formulated in the paper. The author gives the algorithm of the offered iteration method.

Для обґрунтування математичної моделі дискретного середовища, насамперед, дамо визначення дискретних матеріалів. Критерієм відбору є механічні властивості, за якими до дискретних можна віднести не тільки сипкі, зернисті та дисперсні матеріали, але й структурно неоднорідні цілісні, в яких достатньо міцні та жорсткі елементи з'єднані між собою більш слабкими прошарками або розділені тріщинами. Таким чином, до дискретних можна віднести цілий ряд природних та штучних матеріалів, таких як каміння, вугілля, ґрунти, сипкі речовини (пісок, зерно тощо), будівельні матеріали (цегла, бетон, пісковики) і т. ін.

Дискретні матеріали відрізняються від суцільних більшою неоднорідністю, умовами сприйняття і передачі зусиль через точкові контакти, характером деформацій, які відбуваються переважно за рахунок взаємного зсуву гранул. Механічні властивості цих матеріалів суттєво залежать від розмірів й форми частинок, умов контакту, пористості, вологості та багатьох інших факторів.

При математичному моделюванні дискретне середовище вважаємо квазісуцільним, закони деформування якого суттєво відрізняються від закону Гука та нелінійних фізичних співвідношень теорій пластичності. Особливості законів деформування та руйнування дискретних матеріалів встановлюються експериментально, а необхідні для їх описання параметри визначаються за результатами лабораторних випробувань.

Дискретні матеріали об'єднує особливість їх деформування і руйнування, що відбувається переважно шляхом відносних зсувів окремих гранул по границях мікроконтактів, для чого їм необхідно подолати сили тертя по контактних поверхнях. У зв'язку з цим, опір дискретних матеріалів деформуванню та руйнуванню збільшується з ростом величини нормальних стискуючих напружень по площинках зсуву. Розтягуючі напруження такі дискретні матеріали практично не сприймають. Вказані особливості характерні для сухого, кулонового тертя, яке описується моделлю Кулона. Це внутрішнє тертя є головним фактором, що визначає можливість сприйняття зовнішнього навантаження сипкими та зернистими матеріалами. Воно проявляється також при деформуванні, особливо при наближенні до граничного стану, більшості структурних (твердих) матеріалів. Опір зсуву таких матеріалів включає як структурну міцність, так і сухе тертя і може бути описаним комбінованою моделлю, що поєднує моделі Гука і Кулона.

Отже, ознакою впливу внутрішнього кулонового тертя на процес деформування дискретних матеріалів в дограничній та граничній стадіях можна вважати залежність деформацій зсуву і опору зсуву від відношення дотичних та нормальних напружень, або від відношення головних напружень, в той час як деформації та граничний опір зсуву ідеально пластичних матеріалів визначаються тільки величиною дотичних напружень.

Класична механіка деформівного твердого тіла описує зв'язок між інваріантами тензорів напружень та деформацій у вигляді такої схеми

$$\begin{aligned} \{T_{\sigma}^0\} &\leftrightarrow \{T_{\varepsilon}^0\}, \\ \{D_{\sigma}\} &\leftrightarrow \{D_{\varepsilon}\}, \end{aligned}$$

де $\{D_{\varepsilon}\}$ – девіатор тензору деформацій; $\{D_{\sigma}\}$ – девіатор напружень; $\{T_{\varepsilon}^0\}$ – кульовий тензор деформацій; $\{T_{\sigma}^0\}$ – кульовий тензор напружень.

Зв'язок між інваріантами девіаторів напружень і деформацій (наприклад, між октаедричними напруженнями τ_0 і деформаціями $\gamma_0 - \tau_0 = f(\gamma_0)$) залишається незмінним при будь-якому виді напруженого стану (гіпотеза єдиної кривої).

Для матеріалів, що розглядаються, тобто які по різному опираються деформуванню при стискуванні та розтягуванні, зв'язок між девіаторами та кульовими тензорами напружень і деформацій можна охарактеризувати більш складною схемою

$$\begin{aligned} \{T_{\sigma}^0\} &\leftrightarrow \{T_{\varepsilon}^0\} \\ &\quad \times \end{aligned}$$

$$\{D_\sigma\} \leftrightarrow \{D_\varepsilon\}.$$

Залежність між напруженнями та деформацією для таких матеріалів приймає більш складний вид і описує не криву, а поверхню деформування, рівняння якої за умови нехтування впливом дилатансії можна представити як функцію трьох інваріантів

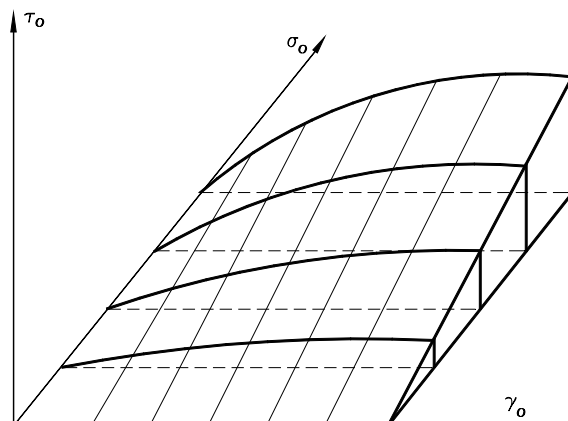


Рис. 1. Поверхня формозмінення ідеально-сипкої речовини

$$\Phi(\tau_0, \gamma_0, \sigma_c) = 0,$$

де $\sigma_c = \sigma_0$ – середнє стискуюче нормальне напруження $\sigma_c = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$.

Таким чином, вплив стискуючих нормальних напружень на деформації зсуву в дограничній стадії деформування призводить до необхідності заміни єдиної кривої деформування $\gamma_0 = f(\tau_0)$ єдиною поверхнею $\gamma_0 = f(\tau_0, \sigma_0)$ або сімейством кривих, що є зрізами цієї поверхні площинами, перпендикулярними вісі σ_0 (рис. 1).

Однією з деформаційних характеристик матеріалів, що найчастіше використовується, є модуль зсуву G , який за фізичним змістом є похідною функції $\tau_0 = f(\gamma_0)$. На відміну від пружних тіл, де $G = \text{const}$, і пластичних, де $G = G(\gamma_0)$, модуль зсуву дискретних матеріалів залежить як від деформацій γ_0 , так і від величини стискуючого напруження σ_0 .

Отже, модуль зсуву дискретних матеріалів повинен розглядатись не як стала матеріалу, а як параметр поверхні деформування $\tau_0 = \tau_0(\gamma_0, \sigma_0)$. Його величина залежить від досягнутого рівня напружено-деформівного стану й може бути визначена тільки за результатами лабораторних випробувань.

Модуль об'ємної деформації K , як відомо, пов'язаний з модулем зсуву G і коефіцієнтом Пуассона ν формулою $K = 2G \frac{1+\nu}{1-2\nu}$. Дослідами, результати яких наведені в роботі В. В. Ковтуна [81], показано, що коефіцієнт Пуассона ν для сипких матеріалів змінюється в порівняно невеликих межах і цими змінами можна нехтувати, тобто прийняти гіпотезу сталості величини коефіцієнта Пуассона ν . Тоді при зміні модуля зсуву G_{zm} залежно від досягнутого рівня напружено-деформівного стану відбуватиметься зміна модуля об'ємної деформації K_{zm} і величину модуля K_{zm} для кожного рівня напруженого стану можна визначити як параметр поверхні деформування $\Phi(\tau_0, \gamma_0, \sigma_0) = 0$.

Таким чином, основні деформаційні характеристики теорії пружності K і G для дискретних матеріалів не є сталими і можуть розглядатись тільки як параметри, що залежать як від досягнутого рівня деформацій, так і від величини стискуючих напружень.

Узагальнюючи сказане, можна зробити висновок, що модель взаємодії машини з технологічним середовищем повинна враховувати такі характерні особливості його деформування:

- 1) залежність граничного опору τ_{tr} від величини стискуючих напружень σ_0 ;
- 2) залежність деформацій зсуву γ_0 від нормальних стискуючих напружень σ_0 ;
- 3) залежність об'ємних деформацій ε_0 від деформацій зсуву γ_0 .

Характер вказаних залежностей можна встановити тільки експериментально шляхом проведення спеціальних лабораторних випробувань і представити у вигляді залежностей між інваріантами тензорів напружень та деформацій.

Запишемо визначальні фізичні співвідношення моделі в інваріантній формі. За інваріанти для дискретного матеріалу зручно обрати октаедричні напруження τ_0 , σ_0 і деформації γ_0 , ε_0 , що виникають по

площинці, рівнонахиленій до головних осей:

$$\begin{aligned}\tau_o &= \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}; \\ \sigma_o &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}; \\ \gamma_o &= \frac{2}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}; \\ \varepsilon_o &= \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3}.\end{aligned}$$

Закон зміни форми з урахуванням внутрішнього тертя запишемо у формі

$$\gamma_o = \frac{\tau_o}{G_e} + F \left(\frac{\tau_o}{\sigma_o} \right), \quad (1)$$

де G_e – модуль зсуву.

Перша складова описує пружні деформації, які присутні при деформуванні будь-якого матеріалу; друга – деформації, пов'язані з внутрішнім тертям. Вид функції $F \left(\frac{\tau_o}{\sigma_o} \right)$ встановлюється експериментально.

Закон зміни об'ємних деформацій можна записати у формі:

$$\varepsilon_o = f(\sigma_o, \gamma_o). \quad (2)$$

Умова переходу в граничний стан:

$$\frac{\tau_o}{\sigma_o} = \frac{c_0}{\sigma_o} + \operatorname{tg} \psi. \quad (3)$$

В співвідношеннях (1), (3) вплив внутрішнього кулонового тертя на процес деформування дискретного матеріалу в дограничній і граничній стадії враховується залежністю деформацій зсуву і опору зсуву від відношення дотичного напруження до нормального $\left(\frac{\tau_o}{\sigma_o} \right)$.

Для конкретизації виду функцій, що входять до фізичних співвідношень (1) – (3), які покладено в основу моделі дискретного середовища, в лабораторії кафедри опору матеріалів Хмельницького національного університету проведено серію спеціальних експериментальних досліджень.

Аналіз результатів цих досліджень, а також опублікованих в літературі даних, дозволив обґрунтувати покладені в основу математичної моделі співвідношення, що описують закономірності зміни форми і об'єму дискретного середовища.

Закономірність зміни форми в системі осей $\tau_o, \gamma_o, \sigma_o$ запропоновано описувати апроксимуючою експериментальні дані зручною для розрахунків степеневою залежністю

$$\tau_o = A \sigma_o \gamma_o^\alpha = G_{3M} \gamma_o, \quad (4)$$

де A і α – дослідні параметри.

Ця залежність не виділяє окремо пружні деформації, котрі на порядки менші загальних деформацій дискретного матеріалу.

При такій апроксимації дотичний модуль зсуву визначається за формулою

$$G_{3M}^n = \alpha A \sigma_o \gamma_o^{\alpha-1}, \quad (5)$$

а січний –

$$G_{3M}^c = A \sigma_o \gamma_o^{\alpha-1}. \quad (6)$$

Закономірності (2) зміни об'єму дискретних матеріалів зручно описувати залежністю, аналогічною закону Гука. Але на відміну від співвідношення теорії пружності вона включає параметр K_{3M} поверхні деформування

$$\varepsilon_o = \frac{\sigma_o}{K_{3M}}, \quad (7)$$

де K_{3M} – змінний модуль об'ємної деформації, що залежить від властивостей матеріалу і досягнутого в ньому напружено-деформівного рівня.

Цей модуль можна визначити зі співвідношення механіки деформівного твердого тіла

$$K_{3M} = G_{3M} \cdot 2 \frac{1+\nu}{1-2\nu} = 2 \frac{1+\nu}{1-2\nu} A \sigma_o \gamma_o^{\alpha-1}, \quad (8)$$

де G_{3M} – змінний модуль зсуву, який залежить як від рівня деформації γ_o , так і від величини стискуючого напруження σ_o (6); ν – коефіцієнт Пуассона.

Введення припущення про сталість величини коефіцієнта Пуассона ν для дискретних матеріалів дає

можливість визначити модуль об'ємної деформації з сімейства експериментальних кривих $\tau_o = F(\gamma_o)$ при $\sigma_o = const$ і відомій величині коефіцієнта ν .

Перехід матеріалу в граничний стан описується умовою (3).

Наведені нелінійні фізичні співвідношення описують в інваріантній формі закономірності деформування і руйнування дискретних матеріалів. Вони відрізняються від відомих тим, що включають в себе параметри K_{3M}, G_{3M} складної багатомірної поверхні деформування $\Phi(\sigma_o, \varepsilon_o, \tau_o, \gamma_o) = 0$, які, природно, залежать від досягнутого напружено-деформівного рівня і не можуть бути наперед визначеними.

Математичне моделювання взаємодії елементів машин та механізмів з дискретним середовищем зводиться до розв'язування системи рівнянь, які формують граничну або контактну задачу для комбінованої пружної та фізично-нелінійної областей.

Наприклад, граничну задачу можна сформулювати таким чином.

Для області O з границями $S \in (S_{(R)}, S_{(u)}, S_{(0)})$ визначити напруження, деформації та переміщення $\{\sigma\} = \{\sigma\}(x, y, z)$, $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon\}(x, y, z)$, $\{u\} = \{u\}(x, y, z)$, що відповідають розрахунковій схемі, прийнятим специфічним законам деформування матеріалу середовища та граничним умовам.

Задача зводиться до розв'язання системи матричних рівнянь:

$$[B]^T \{\sigma\} = \{V\} - \text{диференціальні рівняння рівноваги};$$

$$\{\varepsilon\} = [B]\{u\} - \text{диференціальні геометричні рівняння};$$

$$\{\sigma\} = [D_{3M}]\{\varepsilon\} - \text{фізичні рівняння для середовища},$$

де матриця змінних деформаційних параметрів $[D_{3M}]$ має вигляд

$$[D_{3M}] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} K_{3M} + 4G_{3M} & K_{3M} - 2G_{3M} & K_{3M} - 2G_{3M} & 0 & 0 & 0 \\ K_{3M} - 2G_{3M} & K_{3M} + 4G_{3M} & K_{3M} - 2G_{3M} & 0 & 0 & 0 \\ K_{3M} - 2G_{3M} & K_{3M} - 2G_{3M} & K_{3M} + 4G_{3M} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3G \end{bmatrix},$$

з урахуванням експериментально одержаних інваріантних нелінійних фізичних співвідношень

$$\tau_o = A\sigma_o^\alpha = G_{3M}\gamma_o,$$

$$\sigma_o = K_{3M}\varepsilon_o$$

та граничних умов.

Розв'язання задачі може вестись як у напруженнях, так і в переміщеннях. Другий підхід у більшості випадків є раціональнішим.

Враховуючи складність задачі, розв'язати її можна тільки чисельними методами з використанням спеціально розробленого автором ітераційного процесу.

Відмінність запропонованого ітераційного процесу від існуючих полягає в тому, що "зближення" відбувається не в одній площині напружень-деформацій $(\tau_o - \gamma_o)$, а в тривимірному просторі $(\tau_o, \gamma_o, \sigma_o)$.

Положення кожної кривої $(\tau_o - \gamma_o)$ визначається рівнем досягнутого стискуючого напруження $\sigma_o^{(k)}$. Описаний ітераційний процес добре ілюструється схемою, що наведена на рис. 2.

Як видно з рис. 2, розв'язанню лінійної задачі на першому етапі з попередньо обраними значеннями модулів зсуву $G^{(I)}$ і об'ємної деформації $K^{(I)}$ відповідає точка A_1 , а досягнутому значенню стискуючого напруження $\sigma_o^{(I)}$ та прийнятому степеневому закону деформування – точка a_1 на кривій I . Незбіжність характеризується величиною відрізка A_1a_1 , нове значення модуля зсуву $G^{(II)}$ – тангенсом кута нахилу відрізка, який проходить через точку A_2 . Цьому значенню $G^{(II)}$ відповідає інше середнє стискуюче напруження – $\sigma_o^{(II)}$, і, таким чином, ітерації продовжуються доки не задовольниться умова збіжності.

Рекурентні залежності, що описують запропонований алгоритм для k -го етапу, можна записати таким чином [2]:

$$\left. \begin{aligned} G_{3M}^{(k)} &= \frac{\tau_o^{(k-1)*}}{\gamma_o^{(k-1)}}; \\ K_{3M}^{(k)} &= G_{3M}^{(k)} \frac{1+\nu}{1-2\nu}; \end{aligned} \right\} - \text{коректування деформаційних параметрів};$$

$$[D^{(k)}] = [D](G_{3M}^{(k)}, K_{3M}^{(k)}) - \text{формулювання нової матриці деформаційних параметрів};$$

$[K^{(k)}] = [B]^T [D^{(k)}] [B] V \rightarrow [K^{(k)}]$ – формулювання матриці жорсткості кожного скінченного елемента;

$[K^{(k)}] \{\delta^{(k)}\} = \{R\}$ – формулювання системи рівнянь методу переміщень;

$\{\delta^{(k)}\} = [K^{(k)}]^{-1} \{R\}$ – розв'язання системи рівнянь;

$\{\varepsilon^{(k)}\} = [B^{(k)}] \{\delta^{(k)}\} \rightarrow \{\gamma_0\}, \{\varepsilon_0\}$ – обчислення деформацій;

$\{\sigma^{(k)}\} = [D^{(k)}] [B^{(k)}] \{\delta^{(k)}\} \rightarrow \{\sigma_o^{(k)}\}, \{\tau_o^{(k)}\}$ – обчислення напружень;

$\tau_o^{(k)*} = A_0 \sigma_o^{(k)} (\gamma_o^{(k)})^\alpha$ – визначення досягнутих значень інваріантних напружень;

$\left| \frac{\tau_o^{(k)*} - \tau_o^{(k)}}{\tau_o^{(k)*}} \right| \leq [\xi]$ – перевірка розходження.

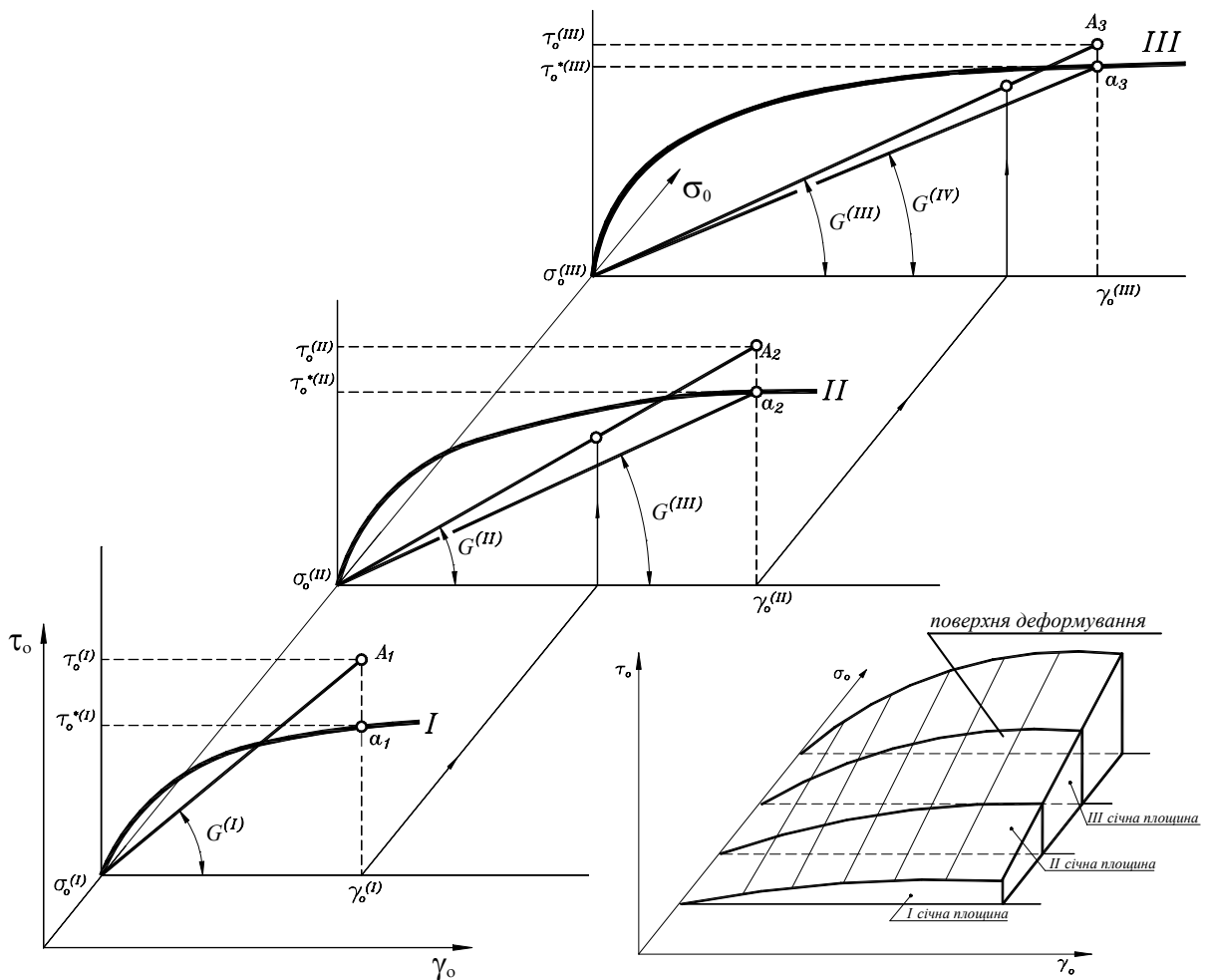


Рис. 2. Графічне представлення ітераційного процесу

Запропонована математична модель дискретного середовища базується на фізичних співвідношеннях, які враховують внутрішнє тертя, що виникає в середовищі. В матрицю жорсткості кожного елемента входять деформаційні модулі K_{zm} та G_{zm} , які залежать від рівня напружено-деформівного стану в елементі і які не можуть бути наперед визначені. Запропонований ітераційний процес, на відміну від існуючих, реалізує наближення до поверхні деформування дискретного середовища. Все це дозволяє враховувати вплив внутрішнього тертя на величини деформацій та опір зсуву.

Список використаних джерел

1. Дорофєєв О. А. Математична модель взаємодії елементів машини з дискретним середовищем та методи її реалізації : дис. ... канд. техн. наук / О. А. Дорофєєв. – Хмельницький, 2004. – 168 с.
2. Ковтун В. В. Нелинейные методы расчета обратных засыпок причальных сооружений с учетом

эксплуатационных факторов : дис. ... докт. техн. наук / В. В. Ковтун. – Хмельницкий , 1988. – 321 с.